Домашна работа 3 по ДИС 1. Компютърни науки, 1 курс, 2 поток

Камен Димитров Младенов, Група 6

23 Януари 2022

Задача 1. Пресметнете границата

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x^2+1)-3e^x+\sqrt[4]{12x+1}+2}{\operatorname{tg}(x^2)-1+\cos x}.$$

Решение: Развиваме функциите в дробта по Маклорен:

$$\ln(x^2+1)=x^2+o(x^2)\qquad e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\qquad \cos x=1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$$

$$(1+12x)^{\frac14}=1+\frac14 12x+\binom{\frac14}{2}x^2+o(x^2)=1+3x-\frac{27}{2}x^2+o(x^2)$$

$$(\operatorname{tg}(x^2))'=\frac{(\sin(x^2))'\cos(x^2)-\sin(x^2)(\cos(x^2))'}{\cos^2(x^2)}=\frac{2x\cos^2(x^2)+2x\sin^2(x^2)}{\cos^2(x^2)}=\frac{2x}{\cos^2(x^2)}$$

$$(\operatorname{tg}(x^2))''=\left(\frac{2x}{\cos^2(x^2)}\right)'=\frac{(2x)'\cos^2(x^2)-2x(\cos^2(x^2))'}{\cos^4(x^2)}=\frac{2\cos^2(x^2)+8x^2\sin(x^2)\cos(x^2)}{\cos^4(x^2)}$$

$$\operatorname{tg}(0)=0,\quad (\operatorname{tg}(x^2))'(0)=0,\quad (\operatorname{tg}(x^2))''(0)=\frac22 x^2\implies \operatorname{tg}(x^2)=x^2+o(x^2)$$

Тоест границата е еквивалентна на:

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2+-3\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)+1+3x-\frac{27}{2}x^2+2+o(x^2)}{x^2-1+1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2\cancel{-3-3x}-3\frac{x^2}{2}+\cancel{1}+\cancel{3x}-27\frac{x^2}{2}+\cancel{2}+o(x^2)}{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{28}{2}x^2+o(x^2)}{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}=\lim_{x\to0}\frac{x^2\left(-\frac{28}{2}+\frac{o(x^2)}{x^2}\right)}{x^2\left(\frac12+\frac{o(x^2)}{x^2}\right)}=-28$$

Задача 2. Да се развие по формулата на Маклорен с точност до $o(x^{2n})$ функцията

$$f(x)=(x^2-1)\cos 2x+\ln(3-6x^2)$$

Решение: [TODO]

Задача 3. Да се докаже, че за всяко $x<0$ е изпълнено, че

$$\frac{1}{2(1+\sqrt2)}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{2x}+\ln\sqrt{x^2+1}-\frac{(\sqrt2-1)\pi}{8}\geq\frac12\ln\left(4-2\sqrt2\right)$$

Решение: [TODO]

Задача 4. Изследвайте функцията и начертайте графиката и:

$$f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Решение:

1. *Дефиниционна Област:* $1+x^2>0 \quad x^2>-1 \implies x\in\mathbb{R}$

2. *Четност:* $f(-x)=\frac{-x-1}{\sqrt{1+(-x)^2}}=\frac{-x-1}{\sqrt{1+x^2}}$. Не е равно на $f(x)$ или $-f(x)$, следователно нито е четна, нито е нечетна.

3. *Асимптоти:*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{\sqrt{1+x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(1-\frac{1}{x})}{\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(1-\frac{1}{x})}{|x|\sqrt{\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}(1-\frac{1}{x})}{\cancel{x}\sqrt{\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}}=1$$

Аналогично $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{\sqrt{1+x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}(1-\frac{1}{x})}{-\cancel{x}\sqrt{\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}}=-1$

Следователно, $y=1$ е хоризонтална асимптота в $+\infty$ и $y=-1$ е хоризонтална асимптота в $-\infty$. Няма наклонена асимптота.

4. *Екстремуми:*

$$f'(x)=\left(\frac{x-1}{\sqrt{1+x^2}}\right)'=\frac{(x-1)'\sqrt{1+x^2}-\left(\sqrt{1+x^2}\right)'(x-1)}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2}=\frac{\sqrt{1+x^2}-\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}2x(x-1)}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2}=$$

$$=\frac{2(1+x^2)-2x^2+2x}{2\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3}=\frac{1+x}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3}=0\implies x=-1$$

$f'(x)$ е отрицателна в $(-\infty;-1)$ и положителна в $(-1;+\infty)$, следователно $f(x)$ има локален минимум в -1, за който $f(-1)=\frac{-2}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2}$

5. *Изпъкналост:*

$$f''(x)=\frac{(1+x)'\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3-\left(\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3\right)'(1+x)}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^6}=\frac{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3-\sqrt{1+x^2}(3x)(1+x)}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^6}=$$

$$=\frac{(1+x^2)-3x-3x^2}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^5}=\frac{1-3x-2x^2}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^5}=0\implies x_{1/2}=\frac{3\pm\sqrt{17}}{-4}$$

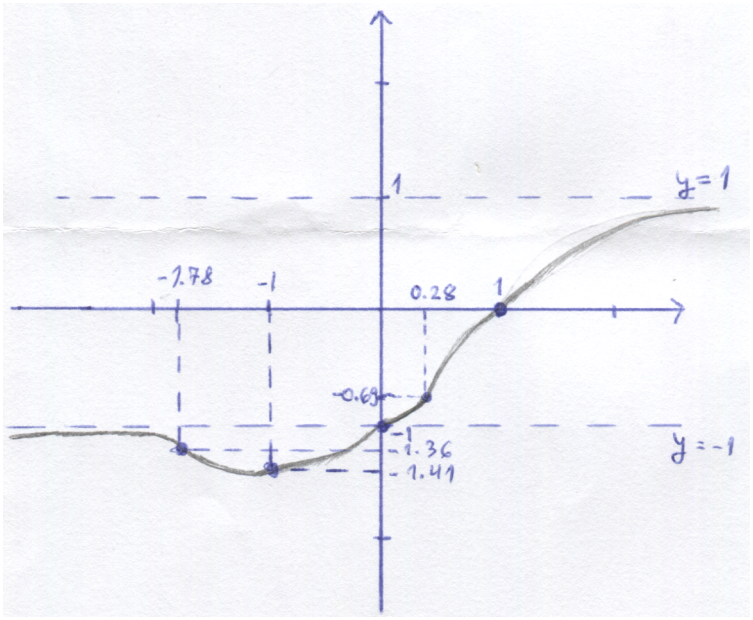
$f''(x)$ е отрицателна в $\left(-\infty;\frac{3+\sqrt{17}}{-4}\right)\cup\left(\frac{3-\sqrt{17}}{-4};+\infty\right)$ и положителна в $\left(\frac{3+\sqrt{17}}{-4};\frac{3-\sqrt{17}}{-4}\right)$. Следователно, в първия интервал $f(x)$ е вдлъбната и изпъкнала във втория.
Пресмятаме: $\frac{3+\sqrt{17}}{-4}\approx-1.78 \quad f(-1.78)\approx-1.36 \qquad \frac{3-\sqrt{17}}{-4}\approx0.28 \quad f(0.28)\approx-0.69$

6. *Характеристични точки:*

$$f(0)=\frac{-1}{\sqrt{1}}=-1 \qquad f(x)=0 \quad \frac{x-1}{\sqrt{1+x^2}}=0\implies x=1$$

7. *Графика на функцията:*

x	$-\infty$		$\frac{3+\sqrt{17}}{-4}$		-1		0		$\frac{3-\sqrt{17}}{-4}$		1		$+\infty$
$f(x)$		$\cap$ $\searrow$	≈-1.36	$\cup$ $\searrow$	$-\sqrt{2}$	$\cup$ $\nearrow$	-1	$\cup$ $\nearrow$	≈-0.69	$\cap$ $\nearrow$	0	$\cap$ $\nearrow$	
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$f''(x)$		$-$		$+$		$+$		$+$		$-$		$-$	



Задача 5. Пресметнете интеграла

$$\int x \operatorname{arctg}(x^2)\,\mathrm{d}\,x$$

Решение:

$$\int x \operatorname{arctg}(x^2)\,\mathrm{d}\,x = \int \operatorname{arctg}(x^2)\,\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{2}\right) \overset{\text{По части}}{=\!=} \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}(x^2) - \int \frac{x^2}{2}\,\mathrm{d}\operatorname{arctg}(x^2)$$

$$\int \frac{x^2}{2}\,\mathrm{d}\operatorname{arctg}(x^2) = \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x^4+1}2x\,\mathrm{d}\,x = \int \frac{1}{x^4+1}\cdot\frac{4}{4}x^3\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{4}\int \frac{1}{x^4+1}d(x^4) = \frac{1}{4}\ln(x^4+1)+c$$

$$\Longrightarrow \int x \operatorname{arctg}(x^2)\,\mathrm{d}\,x = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}(x^2) - \frac{1}{4}\ln(x^4+1)+c$$