Домашна работа 3 по ДИС 1. Компютърни науки, 1 курс, 2 поток

Камен Димитров Младенов, Група 6

23 Януари 2022

Задача 1. Пресметнете границата

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x^2+1)-3e^x+\sqrt[4]{12x+1}+2}{\operatorname{tg}(x^2)-1+\cos x}.$$

Решение: Развиваме функциите в дробта по Маклорен:

$$\ln(x^2+1)=x^2+o(x^2)\qquad e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\qquad \cos x=1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$$

$$(1+12x)^{\frac14}=1+\frac14 12x+\binom{\frac14}{2}x^2+o(x^2)=1+3x-\frac{27}{2}x^2+o(x^2)$$

$$(\operatorname{tg}(x^2))'=\frac{(\sin(x^2))'\cos(x^2)-\sin(x^2)(\cos(x^2))'}{\cos^2(x^2)}=\frac{2x\cos^2(x^2)+2x\sin^2(x^2)}{\cos^2(x^2)}=\frac{2x}{\cos^2(x^2)}$$

$$(\operatorname{tg}(x^2))''=\left(\frac{2x}{\cos^2(x^2)}\right)'=\frac{(2x)'\cos^2(x^2)-2x(\cos^2(x^2))'}{\cos^4(x^2)}=\frac{2\cos^2(x^2)+8x^2\sin(x^2)\cos(x^2)}{\cos^4(x^2)}$$

$$\operatorname{tg}(0)=0,\quad (\operatorname{tg}(x^2))'(0)=0,\quad (\operatorname{tg}(x^2))''(0)=\frac22 x^2\implies \operatorname{tg}(x^2)=x^2+o(x^2)$$

Тоест границата е еквивалентна на:

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2+-3\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)+1+3x-\frac{27}{2}x^2+2+o(x^2)}{x^2-1+1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2\cancel{-3-3x}-3\frac{x^2}{2}+\cancel{1}+\cancel{3x}-27\frac{x^2}{2}+\cancel{2}+o(x^2)}{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{28}{2}x^2+o(x^2)}{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}=\lim_{x\to0}\frac{x^2\left(-\frac{28}{2}+\frac{o(x^2)}{x^2}\right)}{x^2\left(\frac12+\frac{o(x^2)}{x^2}\right)}=-28$$

Задача 2. Да се развие по формулата на Маклорен с точност до $o(x^{2n})$ функцията

$$f(x)=(x^2-1)\cos 2x+\ln(3-6x^2)$$

Решение:

$$\ln(3-6x^2)=\ln\left(3(1-2x^2)\right)=\ln 3+\ln(1-2x^2)=\ln 3+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}(-2x^2)^k+o(x^{2n})=$$

$$=\ln 3-\sum_{k=1}^{n}\frac{2^kx^{2k}}{k}+o(x^{2n})=\ln 3-\sum_{k=2}^{n}\frac{2^kx^{2k}}{k}-2x^2+o(x^{2n})$$

$$(x^2-1)\cos 2x=(x^2-1)\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k(2x)^{2k}}{(2k)!}+o(x^{2n})\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-4)^kx^{2k+2}}{(2k)!}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-4)^kx^{2k}}{(2k)!}+o(x^{2n})=$$

$$=\sum_{k=2}^{n}\frac{(-4)^{k-2}x^{2(k-2)+2}}{(2(k-2))!}+\frac{(-4)^{2n+1}x^{2n+1}}{(2(n-1))!}+\frac{(-4)^{2n+2}x^{2n+2}}{(2n)!}-\sum_{k=2}^{n}\frac{(-4)^kx^{2k}}{(2k)!}-1+2x^2+o(x^{2n})=$$

$$=-1+2x^2+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{(-4)^{k-2}x^{2k-2}}{(2k-4)!}-\frac{(-4)^kx^{2k}}{(2k)!}\right)+o(x^{2n})$$

$$f(x) = \ln 3 - \sum_{k=2}^{n} \frac{2^k x^{2k}}{k} - \cancel{2x^2} - 1 + \cancel{2x^2} + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{(-4)^{k-2} x^{2k-2}}{(2k-4)!} - \frac{(-4)^k x^{2k}}{(2k)!} \right) + o(x^{2n}) =$$

$$= \ln 3 - 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{(-4)^{k-2} x^{2k-2}}{(2k-4)!} - \frac{(-4)^k x^{2k}}{(2k)!} - \frac{2^k x^{2k}}{k} \right) + o(x^{2n})$$

Задача 4. Изследвайте функцията и начертайте графиката и:

$$f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Решение:

1. *Дефиниционна Област:* $1 + x^2 > 0 \quad x^2 > -1 \implies x \in \mathbb{R}$

2. *Четност:* $f(-x) = \frac{-x-1}{\sqrt{1+(-x)^2}} = \frac{-x-1}{\sqrt{1+x^2}}$. Не е равно на $f(x)$ или $-f(x)$, следователно нито е четна, нито е нечетна.

3. *Асимптоти:*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x-1}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x(1-\frac{1}{x})}{\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x(1-\frac{1}{x})}{|x|\sqrt{\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x}(1-\frac{1}{x})}{\cancel{x}\sqrt{\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}} = 1$$

Аналогично $\lim_{x \to +\infty} \frac{x-1}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x}(1-\frac{1}{x})}{-\cancel{x}\sqrt{\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}} = -1$

Следователно, $y = 1$ е хоризонтална асимптота в $+\infty$ и $y = -1$ е хоризонтална асимптота в $-\infty$. Няма наклонена асимптота.

4. *Екстремуми:*

$$f'(x) = \left(\frac{x-1}{\sqrt{1+x^2}}\right)' = \frac{(x-1)'\sqrt{1+x^2} - \left(\sqrt{1+x^2}\right)'(x-1)}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2} = \frac{\sqrt{1+x^2} - \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}2x(x-1)}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2} =$$

$$= \frac{2(1+x^2) - 2x^2 + 2x}{2\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3} = \frac{1+x}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3} = 0 \implies x = -1$$

$f'(x)$ е отрицателна в $(-\infty; -1)$ и положителна в $(-1; +\infty)$, следователно $f(x)$ има локален минимум в -1, за който $f(-1) = \frac{-2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$

5. *Изпъкналост:*

$$f''(x) = \frac{(1+x)'\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3 - \left(\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3\right)'(1+x)}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^6} = \frac{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3 - \sqrt{1+x^2}(3x)(1+x)}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^6} =$$

$$= \frac{(1+x^2) - 3x - 3x^2}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^5} = \frac{1-3x-2x^2}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^5} = 0 \implies x_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{-4}$$

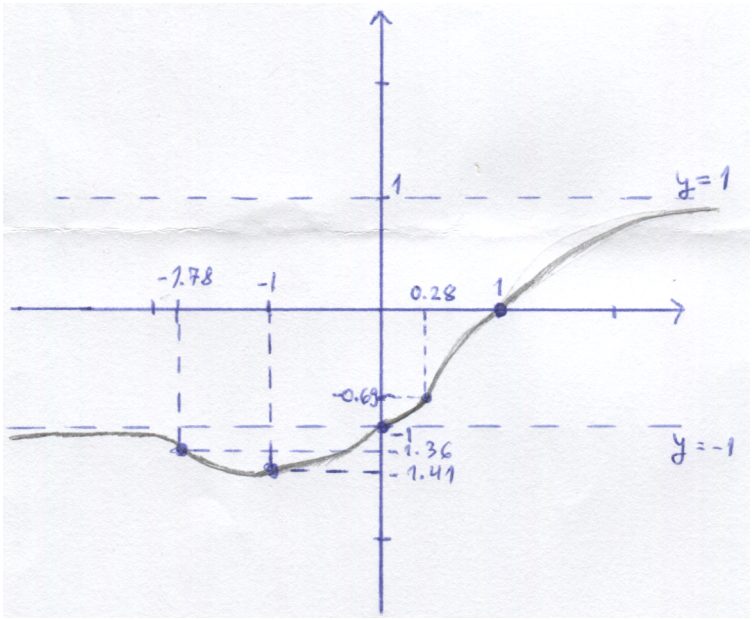
$f''(x)$ е отрицателна в $\left(-\infty; \frac{3+\sqrt{17}}{-4}\right) \cup \left(\frac{3-\sqrt{17}}{-4}; +\infty\right)$ и положителна в $\left(\frac{3+\sqrt{17}}{-4}; \frac{3-\sqrt{17}}{-4}\right)$. Следователно, в първия интервал $f(x)$ е вдлъбната и изпъкнала във втория.
Пресмятаме: $\frac{3+\sqrt{17}}{-4} \approx -1.78 \quad f(-1.78) \approx -1.36 \qquad \frac{3-\sqrt{17}}{-4} \approx 0.28 \quad f(0.28) \approx -0.69$

6. *Характеристични точки:*

$$f(0) = \frac{-1}{\sqrt{1}} = -1 \qquad f(x) = 0 \quad \frac{x-1}{\sqrt{1+x^2}} = 0 \implies x = 1$$

7. Графика на функцията:

x	$-\infty$		$\frac{3+\sqrt{17}}{-4}$		-1		0		$\frac{3-\sqrt{17}}{-4}$		1		$+\infty$
$f(x)$		$\cap$ $\searrow$	≈ -1.36	$\cup$ $\searrow$	$-\sqrt{2}$	$\cup$ $\nearrow$	-1	$\cup$ $\nearrow$	≈ -0.69	$\cap$ $\nearrow$	0	$\cap$ $\nearrow$	
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$f''(x)$		$-$		$+$		$+$		$+$		$-$		$-$	



Задача 5. Пресметнете интеграла

$$\int x \operatorname{arctg}(x^2)\,\mathrm{d}\,x$$

Решение:

$$\int x \operatorname{arctg}(x^2)\,\mathrm{d}\,x = \int \operatorname{arctg}(x^2)\,\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{2}\right) \overset{\text{По части}}{=\!=\!=} \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}(x^2) - \int \frac{x^2}{2}\,\mathrm{d}\operatorname{arctg}(x^2)$$

$$\int \frac{x^2}{2}\,\mathrm{d}\operatorname{arctg}(x^2) = \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x^4+1}2x\,\mathrm{d}\,x = \int \frac{1}{x^4+1}\cdot\frac{4}{4}x^3\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{4}\int \frac{1}{x^4+1}d(x^4) = \frac{1}{4}\ln(x^4+1)+c$$

$$\Longrightarrow \int x \operatorname{arctg}(x^2)\,\mathrm{d}\,x = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}(x^2) - \frac{1}{4}\ln(x^4+1)+c$$