Домашна работа 3 по Алгебра 1. 4 Въпрос.

Камен Димитров Младенов, Група 6

04 Януари 2022

4 Въпрос Спрямо някакъв базис на линейното пространство U над полето $\mathbb{R}$ на реалните числа, линейният оператор $\varphi : U \to U$ има матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -3 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Да се намерят базиси на сечението $\ker(\varphi) \cap \operatorname{im}(\varphi)$ и на сумата $\ker(\varphi) + \operatorname{im}(\varphi)$ на ядрото $\ker(\varphi)$ и образа $\operatorname{im}(\varphi)$ на φ.

Решение: Нека базиса на U да бъде $e = (e_1, ..., e_n)$. По определение, $A = (\varphi(e_1), ..., \varphi(e_n))$, образувана по стълбове, и понеже A има 5 стълба, то $n = 5$ и $\dim U = 5$.

Понеже $\ker \varphi = \{u \in U \mid \varphi(u) = eAx = \mathcal{O}\}$, знаем че координатните стълбове x са решения на $Ax = \mathbb{0}$. Разглеждаме A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -3 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Събираме трети ред с втори. Умножаваме първи по -2 и събираме с трети. Събираме първи с четвърти и пети.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Събираме трети ред с четвърти. Събираме новополучелият се четвърти ред с трети. Делим трети на -5 и пети на 4.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Умножаваме трети ред по -1 и събираме с пети.
Умножаваме трети ред по -3 и събираме с първи.
Умножаваме четвърти ред по -2 и събираме с първи.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Разменяме втори с трети и трети с четвърти. Изпускаме четвърти и пети. Резултатът е матрица от коефициенти на системата от решения, с която представяме $\ker(\varphi)$. Нейното общо решение е:
$x_1 = -x_4 - 2x_5, \quad x_2 = -x_4, \quad x_3 = x_4, \quad \forall x_4, x_5 \in U$

Избираме фундаментална система решения за $\ker(\varphi)$: $a_1 = (-2, 0, 0, 0, 1)$, $a_2 = (-1, -1, 1, 1, 0)$. Следователно $d(\varphi) = \dim \ker(\varphi) = 2$. От теоремата за ранга и дефекта на линейно изображение в крайномерно пространство, $\operatorname{rk}(\varphi) := \dim \operatorname{im}(\varphi) = \dim(U) - \dim \ker(\varphi) = 3$.

Знаем и, че $\operatorname{im}(\varphi) = l(\varphi(e_1), ..., \varphi(e_5))$, то тогава три непропорционални вектора от $\varphi(e_1), ..., \varphi(e_5)$ образуват базис на $\operatorname{im}(\varphi)$. Избираме:

$$\varphi(e_1) = (1, -2, 2, -1, -1), \quad \varphi(e_2) = (3, -1, 1, 2, 1) \quad \text{и} \quad \varphi(e_3) = (2, -3, 3, 0, -2)$$

За да намерим пространство от решения на $\operatorname{im}(\varphi)$, решаваме хомогенна система линейни уравнения с марица от коефициенти:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Умножаваме първи ред по -3 и събираме с втори.
Умножаваме първи ред по -2 и събираме с трети.
Разменяме втори и трети ред.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Умножаваме втори ред по -5 и събираме с трети.
Умножаваме втори ред по 2 и събираме с първи.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

Умножаваме първи по 5, умножаваме трети по 3 и събираме с първи.
Умножаваме втори по 5, умножаваме трети по 2 и събираме с втори.

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 5 & -5 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

Общото решение на на получената система решения е:

$$x_1 = -\frac{7x_5}{5}, \quad x_2 = \frac{5x_3 - 8x_5}{5}, \quad x_4 = \frac{4x_5}{5} \quad \forall x_3, x_5 \in U$$

Избираме фундаментална система решения за $\mathrm{im}(\varphi)$: $b_1 = (-7, -8, 0, 4, 5),\ b_2 = (0, 1, 1, 0, 0)$.

Сечението $\ker(\varphi) \cap \mathrm{im}(\varphi)$ е пространство от решения на хомогенна система линейни уравнения с матрица на коефициентите, съставена от a_1, a_2, b_1, b_2:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -7 & -8 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Умножаваме втори ред по -1. Умножаваме втори по 2 и събираме с първи. Умножаваме втори по 7 и събираме с трети. Умножаваме четвърти по -2 и събираме с първи. Умножаваме четвърти по -1 и събираме с втори. Събираме четвърти с трети.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Умножаваме трети ред по 4. Умножаваме първи по -6 и събираме с трети. Делим трети на 14. Умножаваме втори по 2. Умножаваме първи -1 и събираме с втори. Разменяме първи и втори ред, после трети и четвърти и накрая втори и трети.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Умножаваме четвърти по -1 и събираме с трети. Събираме четвърти с първи. Умножаваме втори по 4 и събираме трети с втори. Делим първи и втори на две. Делим трети на -2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Общото решение на на получената система е:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{x_4}{2}, \quad x_3 = -\frac{x_4}{2}, \quad x_5 = 0 \quad \forall x_4 \in U$$

Следователно, $(0, 1, -1, 2, 0)$ е базис на $\ker(\varphi) \cap \mathrm{im}(\varphi)$

От теоремата за размерност на сума и сечение, $\dim(\ker(\varphi) + \mathrm{im}(\varphi)) = \dim \ker(\varphi) + \dim \mathrm{im}(\varphi) - \dim(\ker(\varphi) \cap \mathrm{im}(\varphi)) = 4$. Знаем, че $\ker(\varphi) = l(a_1, a_2)$ и $\mathrm{im}(\varphi) = l(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3))$