Домашна работа 3 по Алгебра 1. 3 Въпрос.

Камен Димитров Младенов, Група 6

04 Януари 2022

3 Въпрос Спрямо базиса $e = (e_1, e_2, e_3)$ на линейно пространство V над полето $\mathbb{C}$ на комплексните числа, са дадени линейният оператор $\varphi_1 : V \to V$ с

$$\varphi_1(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = (-2x_1 + 5x_2 + x_3)e_1 + (x_1 + x_2 + x_3)e_2 + (x_1 - 2x_2 + x_3)e_3$$

за произволни $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ и линейният оператор $\varphi_2 : V \to V$ с

$$\varphi_2(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = x_1e_1 + x_3e_2 + x_2e_3$$

за произволни $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$.
Спрямо базиса $f = (f_1, f_2)$ на линейното пространство W над $\mathbb{C}$ е дадено линейно изображение

$$\psi : V \to W \quad \text{с} \quad \psi(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = (x_1 - 2x_2 + 3x_3)f_1 + (-2x_1 + 4x_2 - 6x_3)f_2$$

за произволни $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$. За кои стойности на комплексния параметър $p \in \mathbb{C}$ композицията $\psi(\varphi_1 + p\varphi_2) = \mathbb{O}$ е нулевото изображение $\mathbb{O} : V \to W$ с $\mathbb{O}(v) = \mathcal{O}_W$ за всяко $v \in V$.

Решение:

$$\begin{aligned}
\psi(\varphi_1 + p\varphi_2) &= \psi((-2x_1 + 5x_2 + x_3)e_1 + (x_1 + x_2 + x_3)e_2 + (x_1 - 2x_2 + x_3)e_3 + p(x_1e_1 + x_3e_2 + x_2e_3)) = \\
&= \psi((-2x_1 + 5x_2 + x_3 + px_1)e_1 + (x_1 + x_2 + x_3 + px_3)e_2 + (x_1 - 2x_2 + x_3 + px_2)e_3) \\
\text{Полагаме: } & -2x_1 + 5x_2 + x_3 + px_1 = y_1,\ x_1 + x_2 + x_3 + px_3 = y_2,\ x_1 - 2x_2 + x_3 + px_2 = y_3 \\
\implies & \psi(\varphi_1 + p\varphi_2) = \psi(y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3) = (y_1 - 2y_2 + 3y_3)f_1 + (-2y_1 + 4y_2 - 6y_3)f_2
\end{aligned}$$

Разглеждаме $y_1 - 2y_2 + 3y_3$:

$$\begin{aligned}
y_1 - 2y_2 + 3y_3 &= -2x_1 + 5x_2 + x_3 + px_1 - 2(x_1 + x_2 + x_3 + px_3) + 3(x_1 - 2x_2 + x_3 + px_2) = \\
&= -2x_1 + 5x_2 + x_3 + px_1 - 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 2px_3 + 3x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 3px_2 = \\
&= -(1-p)x_1 - 3(1-p)x_2 - 2(1-p)x_3 = -(1-p)(x_1 + 3x_2 + 2x_3)
\end{aligned}$$

Разглеждаме $-2y_1 + 4y_2 - 6y_3$:

$$\begin{aligned}
-2y_1 + 4y_2 - 6y_3 &= -2(-2x_1 + 5x_2 + x_3 + px_1) + 4(x_1 + x_2 + x_3 + px_3) - 6(x_1 - 2x_2 + x_3 + px_2) = \\
&= 4x_1 - 10x_2 - 2x_3 - 2px_1 + 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 4px_3 - 6x_1 + 12x_2 - 6x_3 - 6px_2 = \\
&= 2(1-p)x_1 + 6(1-p)x_2 - 4(1-p)x_3 = (1-p)(2x_1 + 6x_2 - 4x_3)
\end{aligned}$$

Тоест, получаваме:

$$\psi(y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3) = -(1-p)(x_1 + 3x_2 + 2x_3) \cdot f_1 + (1-p)(2x_1 + 6x_2 - 4x_3) \cdot f_2$$

$\implies$ За $p = 1$, $\quad \psi(v) = \mathcal{O}_W = \mathbb{O}(v) \quad \forall v \in V$