# Домашна работа 3 по Алгебра 1. 1 Въпрос.

Камен Димитров Младенов, Група 6

04 Януари 2022

**1 Въпрос** В пространството $F^4$ на наредените четворки с елементи от поле $F$ са дадени линейна обвивка $U = l(a_1, a_2)$ на векторите

$$a_1 = (3, -1, -1, 1) \quad a_2 = (-1, 1, -3, 3)$$

и пространство от решения $W$ на хомогенна система линейни уравнения

$$\left|\begin{array}{rrrrcc} x_1 & -2x_2 & +x_3 & +5x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & -x_2 & -3x_3 & +2x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

Да се намерят базиси на сечението $U \cap W$ и на сумата $U + W$.

**Решение:** Търсим базис на $W$. Съставяме следната матрица от коефициенти на решения:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -5 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & -7 & -1 \\ 0 & 3 & -5 & -8 \end{pmatrix}$$

$x_3$ и $x_4$ са свободни променливи. Тогава съставяме фундаментална система решения:

$$\begin{array}{llllll} x_3 = 0 & x_4 = 3 & \Longrightarrow & x_1 = 1 & x_2 = 8 & (1, 8, 0, 3) \\ x_3 = 3 & x_4 = 0 & \Longrightarrow & x_1 = 7 & x_2 = 5 & (7, 5, 3, 0) \end{array}$$

Разглеждаме матрицата от базисите на $U$ и $W$:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \\ 1 & 8 & 0 & 3 \\ 7 & 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Събираме втори ред с трети. Умножаваме втори по 3 и събираме първи. Умножаваме втори по 7 и събираме с четвърти.

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & -10 & 10 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 9 & -3 & 6 \\ 0 & 12 & -18 & 21 \end{pmatrix}$$

Делим първи ред на 2. Делим трети и четвърти на 3

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 & 5 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -6 & 7 \end{pmatrix}$$

Умножаваме първи по -1 и събираме с втори.
Умножаваме първи по -3 и събираме с трети.
Умонжаваме първи по -4 и събираме с четвърти.

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 & 5 \\ -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 14 & -13 \\ 0 & 0 & 14 & -13 \end{pmatrix}$$

Умножаваме трети по -1 и събираме с четвърти.
Умножаваме първи и втори ред по 14. Умножаваме трети по 5 и събираме с първи. Умножаваме трети по -2 и събираме с втори.
Умножаваме втори по -1. Разменяме първи и втори ред.

$$\sim \begin{pmatrix} 14 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 14 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 14 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Следователно базис на $U + W$ е: $(14, 0, 0, 2), (0, 14, 0, 5), (0, 0, 14, -13)$

Търсим фундаментална система решения на $U$:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & -10 & 10 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 & 5 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 & 5 \\ -1 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$x_3$ и $x_4$ са независими променливи. Съставяме фундаментална система решения:

$$x_3 = 0 \quad x_4 = 1 \implies x_1 = -2 \quad x_2 = -5 \quad (-2, -5, 0, 1)$$
$$x_3 = 1 \quad x_4 = 0 \implies x_1 = 2 \quad x_2 = 5 \quad (2, 5, 1, 0)$$

Разглеждаме матрица от фундаменталните системи решения на $U$ и $W$:

$$\begin{pmatrix} -2 & -5 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -7 & -1 \\ 0 & 3 & -5 & -8 \end{pmatrix}$$

Събираме първи ред с втори. Умножаваме трети по 2.
Умножаваме първи по 3 и събираме с трети.

$$\sim \begin{pmatrix} -2 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 15 & -14 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & -8 \end{pmatrix}$$

Умножаваме втори ред по -14 и събираме с трети.
Умножаваме втори по -5 и събираме с четвърти.

$$\sim \begin{pmatrix} -2 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -15 & -28 & -13 \\ 0 & 3 & -10 & -13 \end{pmatrix}$$

Умножаваме четвърти ред по 5 и събираме с трети.
Умножаваме втори ред по 78 и събираме с трети.
Умножаваме втори ред по 10 и събираме с четвърти.

$$\sim \begin{pmatrix} -2 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Умножаваме първи ред по 3. Умножаваме четвърти по 5 и събираме с първи. Делим първи на -6. Делим четвърти на 3.
Разменяме трети с четвърти и втори с трети.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрицата е несъвместима със свободен член $x_4 = p$. Пресмятаме, че:

$x_1 = -2p,\ x_2 = p,\ x_3 = -p$

$\implies$ Базис на $U \cap W$ е: $(-2p, p, -p, p)$ за произволно $p \in F$