Домашна работа 2 по Алгебра 1. 4 Въпрос.

Камен Димитров Младенов, Група 6

12 Ноември 2021

4 Въпрос Да се намери рангът на матрицата

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & p & 3 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \\ -1 & q & -3 & 12 \end{pmatrix}$$

в зависимост от стойностите на комплексните параметри $p, q \in \mathbb{C}$

Решение: Умножаваме втори ред по -1 и събираме с първи. Събираме трети ред с четвърти. Разменяме първи ред с втори, втори с трети и трети с четвърти. Получаваме:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & q+1 & 0 & 10 \\ 0 & -1 & p-2 & 5 \end{pmatrix}$$

Умножаваме първи ред с -1 и събираме с втори.
Получения втори ред делим на 2 и събираме с първи и четвърти.
Умножаваме четвърти ред по -2 и събраме с трети.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{2} & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & q+1 & -2p+1 & 0 \\ 0 & 0 & p-\frac{1}{2} & 5 \end{pmatrix}$$

I. Случай: $q+1=0$ и $-2p+1=0$
Ако и двете са нули, трети ред се занулява и получаваме Гаус-Жорданов вид с три линейно независими вектора. $\implies \operatorname{rk}(A) = 3$

II. Случай: $q+1 \neq 0$ и $-2p+1=0$ или $q+1=0$ и $-2p+1 \neq 0$
Делим трети ред на ненулевата стойност. Поетапно чрез трети, втори и четвърти ред ще занулим трета, втора и четвърта колона на останалите редове.
Стигаме до Гаус-Жорданов вид с четири линейно независими вектора. $\implies \operatorname{rk}(A) = 4$

III. Случай: $q+1 \neq 0$ и $-2p+1 \neq 0$
1) Подслучай: Трети ред е линейно зависим от втори ред.
Тогава $\exists x \in \mathbb{C}\,(q+1=2x$ и $-2p+1=x)$.
Следователно, $\operatorname{rk}(A) = 3$ за произволно q, когато $p = -\frac{q-1}{4}$ (или за произволно p, когато $q = -4p+1$).

2) Подслучай: Трети ред не е линейно зависим от втори ред.
Умножаваме втори ред по $\frac{-(q+1)}{2}$ и събираме с трети. Делим трети на $-2p+1+\frac{-(q+1)}{2}$, след това поетапно чрез трети и четвърти ред занулуваме третата и четвъртата колона на останалите редове.
Стигаме до Гаус-Жорданов вид на три линейно независими вектора. $\implies \operatorname{rk}(A) = 4$

$\implies$ Ако $\left(q=-1 \text{ и } p=\frac{1}{2}\right)$ или $\left(\text{За произволно } q,\ p=\frac{1-q}{4}\right)$ или $(\text{За произволно } p,\ q=1-4p)$, то рангът $\operatorname{rk}(A) = 3$, иначе $\operatorname{rk}(A) = 4$