Домашна работа 2 по Алгебра 1. 2 Въпрос.

Камен Димитров Младенов, Група 6

12 Ноември 2021

2 Въпрос Да се пресметне детерминантата

$$\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} (x+a_1)^n & (x+a_2)^n & \cdots & (x+a_{n+1})^n \\ (x+a_1)^{n-1} & (x+a_2)^{n-1} & \cdots & (x+a_{n+1})^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (x+a_1)^2 & (x+a_2)^2 & \cdots & (x+a_{n+1})^2 \\ x+a_1 & x+a_2 & \cdots & x+a_{n+1} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

за произволно неотрицателно цяло число $n \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ и произволни рационални числа $x, a_1, a_2, ..., a_{n+1} \in \mathbb{Q}$

Решение: Разменяме първи ред с последния, втори ред с предпоследния и так. нат. Ако $n+1$ е нечетно, не правим нищо със средния ред, тоест правим общо $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ размени на редовете. Полагаме $y_i = x + a_i,\ i \in \{1, 2, ..., n+1\}$. Получаваме:

$$(-1)^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_{n+1} \\ y_1^2 & y_2^2 & \cdots & y_{n+1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{n-1} & y_2^{n-1} & \cdots & y_{n+1}^{n-1} \\ y_1^n & y_2^n & \cdots & y_{n+1}^n \end{vmatrix}$$

Това е детерминантата на Вандермонд относно y_i : $W(y_1, y_2, ..., y_{n+1})$. От упражнения знаем, че тя е равна на $\prod_{j=1}^{n} \left(\prod_{i=j+1}^{n+1} (y_i - y_j) \right) = \prod_{1 \leq j < i \leq n+1} (y_i - y_j) = \prod_{1 \leq j < i \leq n+1} (x + a_i - (x - a_j)) = \prod_{1 \leq j < i \leq n+1} (a_i - a_j)$.

Следователно $$\Delta_{n+1} = (-1)^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \left(\prod_{1 \leq j < i \leq n+1} (a_i - a_j) \right)$$