Домашна работа 2 по Алгебра 1. 1 Въпрос.

Камен Димитров Младенов, Група 6

12 Ноември 2021

1 Въпрос Да се пресметне детерминантата

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & b & b & \cdots & b & b \\ c & a & d & d & \cdots & d & d \\ c & d & a & d & \cdots & d & d \\ c & d & d & a & \cdots & d & d \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c & d & d & d & \cdots & a & d \\ c & d & d & d & \cdots & d & a \end{vmatrix}$$

от ред $n \in \mathbb{N}$ с комплексни елементи $a, b, c, d \in \mathbb{C}$

Решение: Умножавме първи ред по $-\frac{d}{b}$ и събираме с всички други редове. Получаваме:

$$\begin{vmatrix} a & b & b & b & \cdots & b & b \\ c-\frac{ad}{b} & a-d & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c-\frac{ad}{b} & 0 & a-d & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c-\frac{ad}{b} & 0 & 0 & a-d & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c-\frac{ad}{b} & 0 & 0 & 0 & \cdots & a-d & 0 \\ c-\frac{ad}{b} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a-d \end{vmatrix}$$

След това, умножаваме последния ред по $-\frac{b}{a-d}$ и събираме с първия, умножаваме предпоследния със същата дроб и събираме с първия и так. нат. до втория ред включително. Общо правим $n-1$ умножения и събирания с първия ред. Резултатът е:

$$\begin{vmatrix} A & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c-\frac{ad}{b} & a-d & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c-\frac{ad}{b} & 0 & a-d & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c-\frac{ad}{b} & 0 & 0 & a-d & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c-\frac{ad}{b} & 0 & 0 & 0 & \cdots & a-d & 0 \\ c-\frac{ad}{b} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a-d \end{vmatrix}$$

Където $A = a + (n-1)\left[\left(c-\frac{ad}{b}\right)\cdot\left(-\frac{b}{a-d}\right)\right] = a + (n-1)\left(\frac{ad-bc}{a-d}\right)$

Детерминантата е триъгълна относно вторичния диагонал, следователно:

$$\Delta_n = \left[a + (n-1)\left(\frac{ad-bc}{a-d}\right)\right](a-d)^{n-1}$$